# Exercice N°4

Soit $f$ la fonction définie sur $IR$ par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par $C$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1°)** Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour $C$.

**2°) a)** Montrer que pour tout réel $x$ , $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

**b)** Donner une équation cartésienne de la tangente à $C$ d'abscisse 0.

**3°)** Dans le graphique de la feuille annexe, on a représenté la courbe $C$ et la droite $\Delta : y=x$.

La droite $\Delta$ coupe $C$ en un point d'abscisse $\alpha$.

**a)** Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

**b)** En déduire que $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

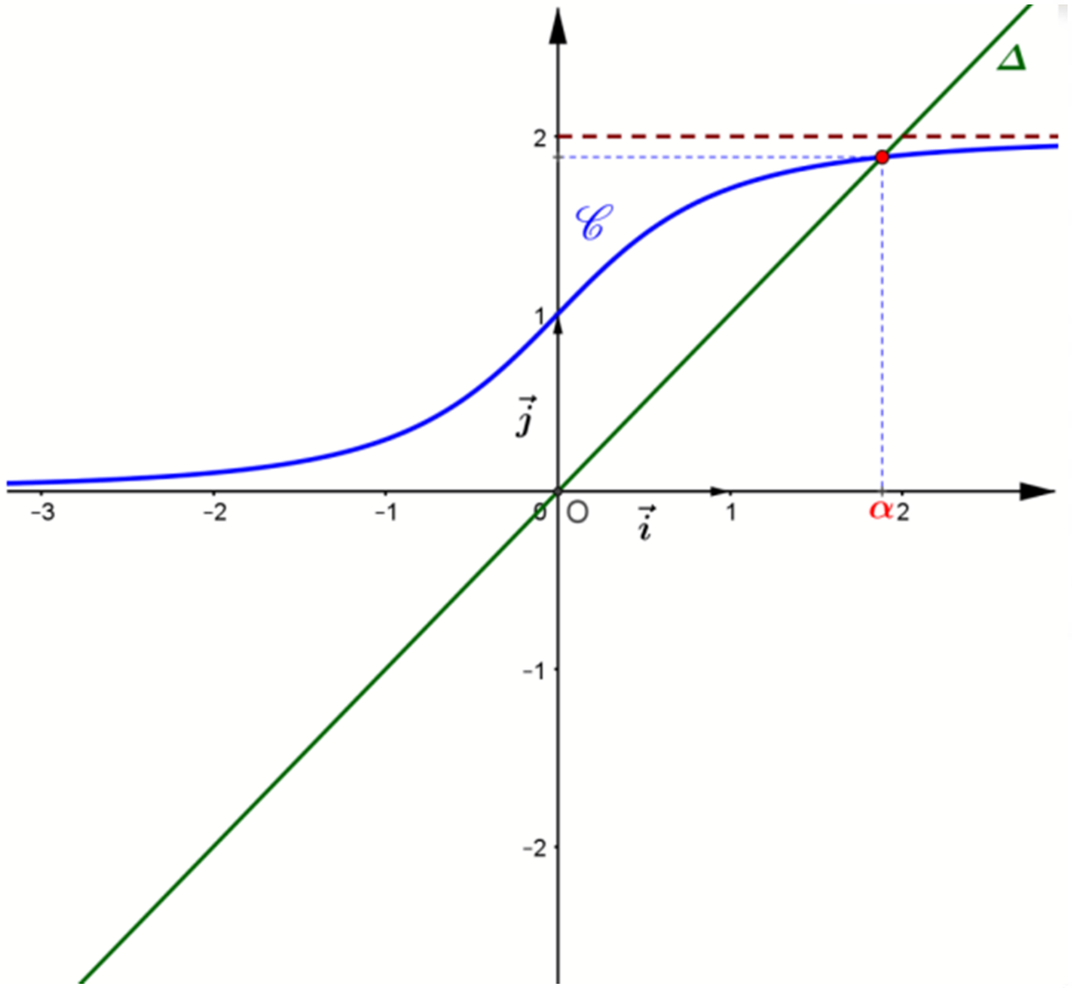
**4°) a)** Montrer que $f$ réalise une bijection de $IR$ sur un intervalle $J$ à préciser.

**b)** On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

On désigne par $C'$ la courbe représentative de $f^{-1}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe $C'$ dans le même repère.

**5°)** On pose $I_{\alpha}=\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)\,dx$ .

**a)** Que représente graphiquement le nombre $I_{\alpha}$ ?

**b)** Calculer, $I_{\alpha}$ en fonction de $\alpha$ .